

**Mitta- ja integraaliteoria 2012 osa 1, tentissä vaadittavaa osaamista**  
**Aihealue: Luentoviikot 1-8 (6.9.-2.11.)/ Kilpeläisen moniste luvut 1-9**

- Lebesguen ulkomitta
  - ulkomitan määritelmä ja perusominaisuudet (siirto- yms. invarianssi, subadditiivisuus, ...)
  - nollamittaiset joukot, numeroituvuuden ja ylinumeroituvuuden rooli mittateoriassa
  - Cantorin joukon määritelmä ja ominaisuudet
- Lebesgue-mitallisuus ja Lebesguen mitta
  - mitallisen joukon määritelmä, karakterisaatiot ja perusominaisuudet (säilyminen joukko-operaatioissa, ulkomitan additiivisuus mitallisten joukkojen luokassa  $\sigma$ -algebra ...), mitallisten joukkojen tunnistaminen
  - ei-mitallisen joukon olemassaolon seuraukset mittateoriassa (ei-mitallista joukkoa ei tarvitse osata konstruoida)
  - $n$ -välien, avointen ja nollamittaisten joukkojen mitallisuus, Borel-joukot, mitallisen joukon, joka ei ole Borel, olemassaolo
  - Lebesguen mitan perusominaisuudet (jatkuvuus, säännöllisyys ...), perusesimerkit, mitan ja ulkomitan laskeminen määritelmän / perusominaisuuksien avulla
- Yksinkertaiset ja mitalliset funktiot
  - yksinkertaisen funktion ja normaaliesityksen määritelmä
  - yksinkertaisen funktion integraalin määritelmä ja perusominaisuudet
  - mitallisen funktion määritelmä, mitallisuuden säilyminen laskuoperaatioissa ja rajankäynneissä, approksimointi yksinkertaisilla funktioilla
  - jatkuvien ja kasvavien funktioiden mitallisuus, mitallisten funktioiden tunnistaminen
  - ei-mitallisen funktion olemassaolo
- Ei-negatiivisten ja vaihtuvamerkkisten funktioiden integraalit
  - määritelmät yksinkertaisista funktioista lähtien mitallisuuden ja positiivijä negatiiviosien avulla, integroituvat ja integroitumattomat funktiot
  - integraalin perusominaisuudet (subadditiivisuus, täysadditiivisuus, lineaarisuus, Tsebysevin epäyhtälö, itseisarvot ...)
  - miksi funktion arvojen muuttaminen nollamittaisessa joukossa ei vaikuta integraaliin, integraali ja äärettömät funktioarvot

- Monotonisen konvergenssin lause, Fatoun lemma ja dominoidun konvergenssin lause
  - muotoilut, todistukset ja seuraukset
  - perusesimerkit oletusten tarkkuudesta (miksi Fatoun lemmassa voi olla aito epäyhtälö, miksi positiivisuusoletuksia tarvitaan, miksi jonon kasvavuutta tai dominoivaa funktiota tarvitaan ...)
  - soveltaminen integrointiteoriassa ja laskuesimerkeissä (tärkeä)
- Riemannin ja Lebesguen integraalien vertailu
  - esimerkit Lebesgue-integroituvista funktioista jotka eivät ole Riemann-integroituvia
  - Riemann-integroituvan funktion Lebesgue-integroituvuustulos ja Lebesguen ehto (Lebesguen ehdon todistusta ei vaadita tentissä), epäoleellisen Riemannin integraalin ja Lebesguen integraalin yhteydet ja erot
  - Riemann-integroituvien ja integroitumattomien funktioiden tunnistaminen, Riemann-integroituvuuden säilymättömyys rajankäynteissä
- Fubinin lause
  - muotoilu ja sovellukset (todistusta ei vaadita tentissä)
  - mittojen ja integraalien laskeminen Cavalierin periaatteen (integraalin esityslause) avulla
  - mittojen ja integraalien laskeminen Fubinin lauseen avulla
- Absoluuttisesti jatkuvat funktiot
  - absoluuttisesti jatkuvien ja rajoitetusti heilahtelevien funktioiden määritelmät ja perusominaisuudet
  - derivaatat ja absoluuttisen jatkuvuuden yhteys analyysin peruslauseeseen
  - absoluuttisesti jatkuvan funktion ja rajoitetusti heilahtelevan funktion tunnistaminen
  - Cantorin funktion määritelmä ja ominaisuudet