**Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 9, 16.11. 2012**

**1.** Olkoon $1 \leq p < \infty$. Anna esimerkki jonosta $(f_j)$, $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L^p$-funktioita siten, että $f_j$ suppenee tasaisesti rajafunktioon $f$, mutta $f \notin L^p(\mathbb{R})$.

**2.** Olkoon $1 \leq p \leq q < \infty$ ja $0 < m_n(A) < \infty$. Osoita, että

$$\left( \frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^p \, dm_n \right)^{1/p} \leq \left( \frac{1}{m_n(A)} \int_A |f|^q \, dm_n \right)^{1/q}$$

kaikilla $f \in L^q(A)$.

**3.** Olkoot $1 \leq p < q \leq \infty$. Anna esimerkki funktiosta $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ jolle $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

**4.** Olkoon $A$ mitallinen joukko, ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Osoita, että

$$L^p(A) \cap L^\infty(A) \subset L^q(A).$$

**5.** Todista Youngin epäyhtälö: jos $a, b \geq 0$ ja $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, niin

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ohje: Integroi funktiota $\varphi(t) = t^{p-1}$ välin $[0, a]$ yli. Integroi sitten käänteisfunktiota $\varphi^{-1}$ välin $[0, b]$ yli. Nyt ensimmäinen integraali antaa funktion $\varphi$ graafin alapuolelle jäävän joukon pinta-alan, ja toinen integraali graafin vasemmalle puolelle jäävän joukon pinta-alan. Laske alat yhteen ja vertaa suorakulmion $[0, a] \times [0, b]$ pinta-alaan. Milloin pätee yhtäsuuruus?

**6.** Avaruus $L^p(\mathbb{R}^n)$ voidaan määritellä myös kun $0 < p < 1$, mutta tällöin ei saada normiavaruutta. Miksi?

**7.** Näytä, että jos $m(A) < \infty$ ja $1 < p < \infty$, niin

$$||f||_p = \lim_{q \to p,\, q < p} ||f||_q$$

kaikilla mitallisilla $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$.