Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 8, 9.11. 2012
Kurssin ensimmäisen osan viimeinen harjoitus

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^3$ ja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Laske $\int_A f\, dm$.

2. Olkoon $0 < a < 1$. Laske

$$\int\limits_{B^n(0,1)\setminus B^n(0,a)} |x|^{-n}\, dm_n(x)$$

(missä $B^n(0, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < t\}$).

3. Olkoon $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivoituva (kaikissa $x \in]a, b[$). Osoita, että rajoittuma $f_{|[c,d]}$ on absoluuttisesti jatkuva kaikilla $[c, d] \subset]a, b[$. Päteekö väite jos f on derivoituva melkein kaikkialla?

4. Onko funktio $f(x) = \sqrt{x}$ absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, 1]$?

5. Konstruoi jatkuva funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ja $A \in \mathcal{M}_1$ siten, että $f^{-1}(A)$ ei ole mitallinen. (Ohje: Voit käyttää hyväksesi seuraavaa tietoa: jokainen positiivimittainen joukko $B \subset [0, 1]$ sisältää ei-mitallisen joukon. Olkoon h Cantorin funktio. Tarkastele funktion $x \mapsto h(x) + x$ käänteisfunktiota).

6. Olkoon $\mathcal{Q}$ välin $[0, 1]$ *dyadisten välien perhe* (katso moniste Lemma 8.2);

$$\mathcal{Q} = \left\{ [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}[: k \in \mathbb{N},\ j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1 \right\}.$$

Olkoon $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva. Osoita, että

$$\overline{D}f(x) := \limsup_{t\to 0} \sup_{\{x\in[y,y+t[\in\mathcal{Q}\}} \frac{|f(y + t) - f(y)|}{t} < \infty \tag{1}$$

melkein kaikilla $x \in [0, 1]$ (Ohje: Muuten kaikilla $M > 0$ on suuri joukko pareittain pistevieraita välejä joilla osamäärä (1) on suurempi kuin M. Laske yhteen ja vertaa funktion f heilahteluun).

7. Olkoon $p \geq 1$, ja $u : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)^p\, dx \Big)^{1/p} \leq p \int\limits_0^\infty m_n(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq t\})^{1/p}\, dt.$$