Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 7, 2.11. 2012

1. Olkoon $0 < s < 1$. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{[0,1]} \frac{jx^s}{1+jx}\, dx.$$

2. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{[1,\infty[} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\, dx.$$

3. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$, $m_n(A) < \infty$, ja (f_j) jono integroituvia funktioita $f_j : A \to [-\infty, \infty]$. Oletetaan, että $f_j \to f$ tasaisesti joukossa A. Osoita, että f on integroituva ja

$$\int\limits_A f\, dm_n = \lim_{j\to\infty} \int\limits_A f\, dm_n.$$

4. Konstruoi Riemann-integroituva funktio $f : [0,1] \to [0,1]$ joka on epäjatkuva ylinumeroituvassa joukossa.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m_n(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\, dm_n = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Olkoot $f_j : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallisia. Osoita, että jos funktio $f = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ on integroituva, niin

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_A f_j\, dm_n = 0.$$

7. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Oletetaan, että myös funktio $t \mapsto tf(t)$ on integroituva. Asetetaan $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt)\, dt.$$

Osoita, että F on jatkuvasti derivoituva.