Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 6, 19.10. 2012

1. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f = u - v$, missä $u, v \geq 0$ ovat integroituvia. Osoita, että f on integroituva ja

$$\int_A f\,dm = \int_A u\,dm - \int_A v\,dm.$$

2. Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Osoita, että $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(A)$.

3. Olkoot $f_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, \ldots$ mitallisia funktioita ja $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integroituva s.e. $f_j \leq g$ kaikilla j. Osoita (Fatoun lemman avulla), että

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j\,dm \leq \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{j\to\infty} f_j\,dm.$$

Päteekö väite ilman oletusta $f_j \leq g$?

4. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B(0,2)\setminus\overline{B}(0,1)} \log\Big(1 + \frac{1}{|x|^j}\Big)|x|\,dm.$$

5. Määrää ne luvut $a \in \mathbb{R}$ joille raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \Big(1 - \frac{x}{k}\Big)^k e^{ax}\,dx$$

on olemassa ja äärellinen.

6. Määritä perustellen raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,\infty[} \frac{dx}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$

7. Todistetaan, että $0 = 1$: Olkoon $f_k : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $f_k = \chi_{[k,k+1[}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k\,dm = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{[j,j+1[} \lim_{k\to\infty} f_k\,dm \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{[j,j+1[} f_k\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k\,dm = 1, \end{aligned}$$

soveltamalla integraalin täysadditiivisuutta ja dominoidun konvergenssin lausetta väleillä $[j, j+1[$. Miksi todistus on väärin?