Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 5, 12.10. 2012

1. Anna esimerkki funktiosta $f : [0,1] \to [0,\infty]$ siten, että $f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$, mutta $\int_{[0,1]} f \, dm_n = \infty$.

2. Olkoon (x_k), $k = 1, 2, \ldots$ jono avaruudessa $\overline{\mathbb{R}}$. Osoita tarkasti, että $\lim_{k\to\infty} x_k$ on olemassa jos ja vain jos $\liminf_{k\to\infty} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k$.

3. Olkoot $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia, ja $u \in \mathcal{Y}^+$. Osoita, että

$$I\Big(u, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \lim_{j\to\infty} I(u, E_j).$$

4. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_n$, ja $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen. Osoita, että

$$\int\limits_{\cup A_j} f \, dm_n \le \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{A_j} f \, dm_n.$$

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen funktio jolle $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dm_n < \infty$. Osoita, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $R > 0$ siten, että

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} f \, dm_n < \epsilon.$$

6. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *alhaalta puolijatkuva*, jos joukko

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) > \lambda\}$$

on avoin kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Anna esimerkki alhaalta puolijatkuvasta funktiosta joka ei ole jatkuva.

(ii) Osoita, että f on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos

$$f(x) \le \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla jonoilla (x_k) siten, että $x_k \to x$ kun $k \to \infty$.

7. Anna jono (f_k), missä kukin $f_k : [0,1] \to [0,1]$ on mitallinen, siten että

$$\int\limits_{[0,1]} f_k \, dm_1 \to 0$$

kun $k \to \infty$, mutta $f_k(x)$ ei suppene millään $x \in [0,1]$.