Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 4, 5.10. 2012

1. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$. Osoita, että kokoelma

$$\Gamma = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : \ f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_n\}$$

on σ-algebra.

2. Näytä, että funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f = 10\chi_{[-2,5]} + 5\chi_{]2,3[} + \chi_{\mathbb{Q}}$ on yksinkertainen. Anna funktion f normaaliesitys ja laske integraali $I(f, \mathbb{R})$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yksinkertainen funktio ja joukot $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ pareittain pistevieraita ja Lebesgue-mitallisia. Osoita, että

$$I\Big(f, \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} I(f, E_j).$$

4. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen ja $p > 0$. Osoita, että funktio $|f|^p$ on mitallinen. Keksi esimerkki funktiosta f siten, että $|f|$ on mitallinen, mutta f ei ole mitallinen.

5. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen, ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $g \circ f$ on mitallinen.

6. Olkoon $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}_n$, mitallinen ja olkoon $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ funktio, jolle

$$m_n^*(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että g on mitallinen. Jos f on yksinkertainen, onko myös g yksinkertainen?

7. Olkoon $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kasvava. Osoita, että f on mitallinen.