Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 3, 28.9. 2012

1. Anna esimerkki rajoittamattomasta avoimesta joukosta $A \subset \mathbb{R}$ jolle $m_1(A) < \infty$.

2. Olkoon C Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Osoita, että joukolle

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in C\}$$

pätee $m_2(A) = 0$.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $m_n^*(\partial A) = 0$ niin A on Lebesgue-mitallinen.

4. Olkoot $E, F \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja joiden etäisyys on positiivinen, eli

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf\{|x - y| : x \in E, y \in F\} > 0.$$

Osoita, että $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$.

5. Keksi esimerkki mitallisista joukoista $\mathbb{R}^n \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, joille

$$m_n\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) < \lim_{j\to\infty} m_n(A_j).$$

6. Modifioi Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon konstruktiossa poistettavien välien pituuksia siten, että $m_1(C) > 0$ pätee "modifioidulle"Cantorin joukolle C.

7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ rajoitettu. Osoita, että jos $m_1^*(A \cap I) \leq m_1^*(I)/2$ jokaisella välillä $I \subset \mathbb{R}$, niin $m_1^*(A) = 0$.