Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 2, 21.9. 2012

1. Olkoon
$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$
Osoita, että $m_n^*(A) = 0$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Asetetaan $x + A = \{x + y : y \in A\}$. Osoita, että $m_n^*(x + A) = m_n^*(A)$.

3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Asetetaan $tA = \{tx : x \in A\}$. Osoita, että $m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A)$.

4. Olkoon
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le x_1\}.$$
Määritä $m_2^*(A)$ (voit käyttää ulkomitan perusominaisuuksia).

Olkoon $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kierto, eli lineaarikuvaus jonka matriisille pätee $LL^T = I$ ja $\det(L) = 1$. Asetetaan $\mu(A) = m^*(L(A))$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$.

5. Osoita, että

(i) $\mu(x + A) = \mu(A)$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$, ja

(ii) Jos joukot $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ ovat pareittain pistevieraita avoimia joukkoja, niin
$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

6. Olkoon
$$\mathcal{Q} = \{[a_1, a_1 + 2^{-j}] \times \cdots \times [a_n, a_n + 2^{-j}] \subset \mathbb{R}^n : a_i \in \mathbb{R}\, \forall i = 1, \ldots, n,\ j \in \mathbb{Z}\},$$
siis niiden kuutioiden kokoelma joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja sivun pituus muotoa 2^{-j}. Osoita, että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että $\mu(Q) = C m_n^*(Q)$ kaikilla $Q \in \mathcal{Q}$ (vihje: totea ensin, että näin on jollekin kuutiolle $Q \in \mathcal{Q}$. Täytä sitten tällainen kuutio pienemmillä ja päättele, että sama pätee kaikilla $Q \in \mathcal{Q}$).

7. Osoita, että $\mu(V) = m_n^*(V)$ kaikilla avoimilla $V \subset \mathbb{R}^n$ (osoita, että V on numeroituva yhdiste kuutioita $Q \in \mathcal{Q}$ joiden sisukset ovat pareittain pistevieraita).