Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 12, 7.12. 2012

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, missä Γ koostuu äärellisen monesta joukosta. Osoita, että jos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on Γ-mitallinen, niin f saa vain äärellisen monta arvoa.

2. Olkoot $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}^1)$ ja $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}^2)$ mitta-avaruuksia, missä $\mathcal{H}^s$ on Hausdorffin mitta. Jos $\mathcal{H}^1(E) = 0$, onko $\mathcal{H}^2(E) = 0$? Entä toisinpäin?

3. Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Osoita, että

$$\Gamma_{\mathcal{F}} = \bigcap \{\Gamma : \Gamma \text{ on } \sigma\text{-algebra ja } \mathcal{F} \subset \Gamma\}$$

on σ-algebra.

4. Määrää yksiöiden

$$\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$$

virittämä σ-algebra $\mathbb{R}$:ssä.

5. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, ja $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituvia funktioita. Osoita, että $f = g$ μ-melkein kaikkialla jos ja vain jos

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

6. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(2 + \frac{n^2}{k} \Big)^{-n}.$$

7. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\frac{1}{n+k} - 3 \Big)^{-n}.$$