Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 11, 30.11. 2012

1. Olkoon $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ jono ei-negatiivisia reaalilukuja siten, että $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Osoita, että $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ on todennäköisyyskenttä, missä

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} a_j.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $t, s > 0$. Osoita, että

$$\mathcal{H}^s(tA) = t^s \mathcal{H}^s(A).$$

Tässä $tA = \{tx : x \in A\}$.

3. Anna esimerkki ulkomitasta μ^* ja joukoista A_j joille $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $\mu^*(A_1) < \infty$, siten, että

$$\lim_{k \to \infty} \mu^*(A_k) > \mu^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

4. Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$, ja $s, \delta > 0$. Osoita, että $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ jos ja vain jos $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

5. Tarkastellaan Hausdorffin $\frac{1}{2}$-sisältöä $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$ joukossa $\mathbb{R}$.

(i) Osoita, että $\mathcal{H}^{1/2}_\infty = v(I)^{1/2}$ kaikilla rajoitetuilla väleillä $I \subset \mathbb{R}$.

(ii) Osoita, että väli $[0, 1]$ ei ole $\mathcal{H}^{1/2}_\infty$-mitallinen.

(Vihje: $\sum a_j^{1/2} \geq (\sum a_j)^{1/2}$ kun $a_j \geq 0$.)

6. Osoita, että Carathéodoryn konstruktio antaa metrisen ulkomitan.

7. Olkoon $C \subset [0, 1]$ Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko. Osoita, että $\mathcal{H}^s(C) > 0$ kun $s = \log 2/ \log 3$ (ohje: olkoon (A_k) avointen välien muodostama joukon C peite. Koska C on kompakti, voidaan olettaa että (A_k) on äärellinen. Valitse j siten, että jokaisen A_k pituus on selvästi suurempi kuin 3^{-j}, ja laske montako konstruktion j:nnen vaiheen väliä sisältyy kuhunkin joukkoon A_k).