Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 10, 23.11. 2012

1. Olkoon X joukko, $x \in X$, ja δ_x pisteeseen x keskittynyt Diracin (ulko)mitta. Määritä δ_x-mitalliset joukot.

2. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Anna esimerkki jonosta (f_j), $f_j \in L^p([0,1])$, siten, että $||f_j||_p \to 0$, mutta $(f_j(x))$ ei suppene millään $x \in [0,1]$.

3. Olkoon X ylinumeroituva joukko ja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$,

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{kun } A \subset X \text{ on numeroituva} \\ 1, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että μ^* on ulkomitta.

4. Olkoot X ja μ^* kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että joukko $A \subset X$ on μ^*-mitallinen jos ja vain jos A on numeroituva tai $X \setminus A$ on numeroituva.

5. Olkoon $1 \leq p < r < q < \infty$. Osoita, että

$$L^r(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n),$$

eli että jokaiselle $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on olemassa $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ siten, että $f = g + h$.

6. Olkoon μ^* ulkomitta joukossa X ja $Y \subset X$. Määritellään rajoittuma

$$\mu^*|_Y(A) = \mu^*(Y \cap A).$$

Osoita, että $\mu^*|_Y$ on ulkomitta X:ssä.

7. Olkoon $1 \leq p \leq \infty$, ja

$$B = \{f \in L^p([0,1]) : ||f||_p \leq 1\}$$

avaruuden $L^p([0,1])$ suljettu yksikköpallo. Osoita, että B ei ole kompakti.