Mitta- ja integraaliteoria, Harjoitus 1, 14.9. 2012

1. Osoita, että jos $a_{ij} \geq 0$ kaikilla $i \in I$ ja $j \in I'$, niin

$$\sum_{(i,j)\in I\times I'} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I'} a_{ij} = \sum_{j\in I'}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

2. Olkoon $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$, ja $a_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$. Osoita, että

$$\sum_{i\in I} a_i = \infty.$$

3. Olkoon $f : [0,1] \to [0,1]$ kasvava funktio. Osoita, että f on epäjatkuva korkeintaan numeroituvan monessa pisteessä (voit käyttää edellistä tehtävää).

4. Olkoon $\epsilon > 0$. Osoita, että rationaalilukujen joukko voidaan peittää numeroituvan monella avoimella välillä joiden pituuksien summa on korkeintaan ϵ.

Joukon $A \subset \mathbb{R}$ Jordanin ulkomitta on

$$\mathcal{J}(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} v(I_i) : I_i \text{ avoin väli }, A \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i\right\},$$

missä $v(I)$ on välin I pituus.

5. Osoita, että $\mathcal{J}(A) = \mathcal{J}(\overline{A})$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}$.

6. Osoita, että

$$\mathcal{J}(\mathbb{Q}) > \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{J}(\{q\}).$$

7. Olkoon $a_j = (-1)^j j^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$. Osoita, että on olemassa bijektio $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \neq \sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}.$$