Kompleksianalyysi, Harjoitus 9, 15.3. 2013

1. Olkoot f_1 ja f_2 analyyttisiä funktioita joukossa G, ja $\overline{B}(z_0, r) \subset G$. Oletetaan, että $f_1(z) = f_2(z)$ kaikilla $z \in S(z_0, r)$. Osoita, että $f_1(z) = f_2(z)$ kaikilla $z \in B(z_0, r)$.

2. Olkoon $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, ja $f : \mathbb{C} \to D$ analyyttinen funktio. Osoita, että f on vakiofunktio.

3. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{\text{Log}(1+z)}{z^2 - 1}\, dz, \quad \text{kun } \gamma(t) = 2 + \frac{3}{2}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

4. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\, dz, \quad \text{kun } \gamma(t) = 2 + \frac{3}{2}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi, \text{ ja } k \in \mathbb{N}.$$

5. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{\text{Log}(1+z)}{(2z-1)^3}\, dz, \quad \text{kun } \gamma(t) = (2\cos t - 1)e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

6. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Oletetaan, että on olemassa $a, b > 0$ siten, että $|f(z)| \le |z|^a + b$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on polynomi.

7. Olkoon $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $u(z) = \text{Log}\,|z|$. Osoita, että u on harmoninen funktio.

8. Olkoon u kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että ei ole olemassa analyyttistä funktiota $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ siten, että $u = \text{Re}(f)$.

9. Todista Schwarzin lemma: Jos $f : B(0,1) \to B(0,1)$ on analyyttinen ja $f(0) = 0$, niin $|f(z)| \le |z|$ kaikilla $z \in B(0,1)$. Lisäksi, jos on $z_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$ jolle $|f(z_0)| = |z_0|$, niin on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ jolle $|\lambda| = 1$ ja $f(z) = \lambda z$ kaikilla $z \in B(0,1)$. (vihje: tarkastele funktiota $z \mapsto f(z)/z$).