

Kompleksianalyysi, Harjoitus 8, 8.3. 2013

1. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2 \cos t + i \sin t$. Laske $\int_{\gamma} \sin z^2 dz$.
2. Olkoot $\gamma_1(t) = e^{it}$ ja $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-i2t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Määrää $n(\gamma_1 * \gamma_2, z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$.

3. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

4. Olkoon γ kuten edellisessä tehtävässä. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log}(z + e)}{z} dz.$$

5. Olkoon $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{i2\pi t}$. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz.$$

6. Olkoon $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen, ja $\overline{B}(a, r) \subset G$. Osoita, että

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

7. Olkoon $\gamma = \beta * [4\pi, 0]$, missä $\beta : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\beta(t) = te^{it}$. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z + 4)} dz.$$

8. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$, ja $a \in B(0, r)$. Laske

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z - a|^2}.$$

(vihje: huomaa, että $|dz| = -irdz/z$.)