Kompleksianalyysi, Harjoitus 7, 1.3. 2013

1. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tie alueessa G, ja $f, g : G \to \mathbb{C}$ analyyttisiä (siten, että derivaatat f' ja g' ovat jatkuvia). Osoita, että

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = f(\gamma(b))g(\gamma(b)) - f(\gamma(a))g(\gamma(a)) - \int_\gamma g(z)f'(z)\,dz.$$

2. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tie, jolle $\gamma(a) = 0$ ja $\gamma(b) = i\,\mathrm{Log}\,2$. Laske $\int_\gamma z \sin z\,dz$.

3. Olkoot $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ alueita. Jos funktiolla f on kantafunktio sekä alueessa G_1 että alueessa G_2, onko sillä aina kantafunktio myös alueessa $G_1 \cup G_2$?

4. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tie ja $z_0 \notin |\gamma|$. Laske integraalit

$$\int_\gamma (z - z_0)^{-n}\,dz, \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

5. Osoita, että funktiolla $f(z) = \bar{z}$ ei ole kantafunktiota missään avoimessa joukossa $G \subset \mathbb{C}$ (sovella Lausetta 3.3).

6. Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen siten, että $|f(z) - 1| < 1$ kaikille $z \in G$ (ja f' jatkuva). Osoita, että

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

jokaiselle suljetulle tielle γ alueessa G.

7. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + e^{it}$. Laske

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 - 1}\,dz.$$

8. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Laske Cauchyn lauseen avulla

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2z}$$

(voit tehdä osamurtokehitelmän).

9. Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Laske Cauchyn lauseen avulla

$$\int_\gamma \sqrt{9 - z^2}\,dz.$$