

## Kompleksianalyysi, Harjoitus 6, 22.2. 2013

1. Olkoon  $z = x + iy$ . Laske

$$\int_{[0,1+i]} x dz \quad \text{ja} \quad \int_{[0,1+i]} y dz.$$

Tässä merkintä  $[z_1, z_2]$  tarkoittaa polkua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ .

2. Olkoon  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = 3t^2 + 2t^3i$ . Laske  $\ell(\gamma)$ .

3. Olkoon  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = 100 + e^{-2it}$ . Laske

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \quad \text{ja} \quad \int_{\gamma} z |dz|.$$

4. Olkoot  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Laske

$$\int_{[z_1, z_2]} \bar{z} dz.$$

5. Olkoon  $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = e \cos t + i \sin t$ . Laske

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$$

6. Olkoon  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = e^{1+it}$ . Osoita, että

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{\text{Log } z} \right| \leq e \text{Log}(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

7. Olkoot  $\gamma_1 = [1, 0]$ ,  $\gamma_2 = [0, i]$  polkuja (janoja). Onko olemassa jatkuvasti differentioituvaa polkua  $\beta$  joka on ekvivalentti polun  $\gamma_1 * \gamma_2$  kanssa?

8. Olkoon  $k \in \mathbb{N}$ , ja  $\gamma_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma_k(t) = t + i \sin(kt)$ . Laske

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell(\gamma_k) \quad \text{ja} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} z dz.$$