Kompleksianalyysi, Harjoitus 5, 15.2. 2013

1. Olkoon $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}$. Etsi konformikuvaus $f : D \to B(0,1)$.

2. Olkoon $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z)| < \pi/4\}$. Etsi konformikuvaus $f : D \to B(0,1)$.

3. Olkoon
$$f(z) = |z|^2 + \frac{z}{\bar{z}}.$$
Laske määritelmää käyttäen $f_{\bar{z}}(z_0)$ kun $z_0 \neq 0$.

4. Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ jatkuvasti $\mathbb{R}$-differentioituva. Osoita, että $(\bar{f})_z = \overline{f_{\bar{z}}}$ ja $(\bar{f})_{\bar{z}} = \overline{f_z}$.

5. Olkoot $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ja $f(z) = z^k \bar{z}^\ell$. Osoita, että $f_z = kz^{k-1}\bar{z}^\ell$ ja $f_{\bar{z}} = \ell z^k \bar{z}^{\ell-1}$.

6. Olkoon $\alpha > 0$, ja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|^{\alpha-1}z$ kun $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Laske f_z ja $f_{\bar{z}}$ niissä pisteissä missä ne ovat olemassa.

7. Olkoon A, $Az = cz + d\bar{z}$, $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus. Osoita, että $\sup_{|z|=1} |Az| = |c| + |d|$, ja $\det(A) = |c|^2 - |d|^2$.

8. Olkoon $z = re^{i\theta}$, ja f jatkuvasti $\mathbb{R}$-differentioituva, $f(z) = f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$. Osoita, että f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt (kun $z \neq 0$) jos ja vain jos
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$