

Kompleksianalyysi, Harjoitus 4, 8.2. 2013

1. Määritellään hyperbolinen cosini ja sini,

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että $\cosh(z) = \cos(iz)$, $\sinh(z) = -i \sin(iz)$, ja $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

2. Olkoon $f : B(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen. Oletetaan, että $\operatorname{Re}(f)$ on vakio $B(0,1)$:ssä. Osoita, että f on vakio.
3. Olkoon $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2\}$ ja $D' = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\}$. Konstruoi konformikuvaus $f : D \rightarrow D'$.

4. Osoita, että funktio

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

on jatkuva.

5. Osoita, että kompleksinen sini on surjektio; $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
6. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja g funktion $f(z) = z^k$ käänteisfunktion haara alueessa D . Osoita, että D :ssä on täsmälleen k eri f :n käänteisfunktion haaraa ja ne ovat muotoa cg , missä $c \in \mathbb{C}$ on vakio jolle $c^k = 1$.
7. Osoita, että funktio $f(z) = \cos \sqrt{z}$ on kokonainen.
8. Osoita, että funktiolla $f(z) = z^2$ ei ole koko alueessa $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ käänteiskuvauksen f^{-1} haaraa.