Kompleksianalyysi, Harjoitus 3, 1.2. 2013

1. Olkoot $f, g : G \to \mathbb{C}$ derivoituvia pisteessä $z_0 \in G$ ja $g(z_0) \neq 0$. Osoita, että $\frac{f}{g}$ on derivoituva pisteessä z_0, ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

2. Tutki missä pisteissä seuraavat funktiot ovat derivoituvia, ja laske derivaatat: (i) $z \mapsto \frac{z^2+iz}{z\bar{z}}$, (ii) $z \mapsto \frac{|z|^2}{4i}$, (iii) $z \mapsto \frac{3z^4+5z}{2z^2+2z}$.

3. Olkoon $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomi; $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Olkoon edelleen $P(c) = 0$. Osoita, että $P(z) = (z-c)Q(z)$, missä $Q(z) = b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_0$, $b_{n-1} \neq 0$. Päättele, että P:llä on korkeintaan n kappaletta nollakohtia.

4. Olkoon g derivoituva pisteessä z_0 ja $f(z) = \overline{g(z)}$. Osoita, että funktio h, $h(z) = f(\bar{z})$, on derivoituva pisteessä $\overline{z_0}$ ja määrää sen derivaatta.

5. Jos edellisen tehtävän oletuksin myös f on derivoituva pisteessä z_0, niin määrää derivaatta $f'(z_0)$.

6. Todista l'Hospitalin sääntö: Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä z_0 ja $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Jos $g'(z_0) \neq 0$, niin

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

7. Olkoot a ja b kompleksilukuja, ja $< a, b >$ euklidinen sisätulo. Osoita, että

$$2 < a, b > = a\bar{b} + \bar{a}b.$$

8. Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ derivoituva pisteessä z_0, ja $a, b \in \mathbb{C}$. Osoita, että

$$< f'(z_0)a, f'(z_0)b > = |f'(z_0)|^2 < a, b > .$$

Mitä tämä tarkoittaa geometrisesti?

9. Olkoon $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Etsi kaikki funktiot $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ siten, että $f = u + iv$ on analyyttinen, kun

(a) $u(z) = x^2 - y^2$,

(b) $u(z) = e^{x+y}$,

$z = x + iy$.