

## Kompleksianalyysi, Harjoitus 2, 25.1. 2013

1. Olkoot  $A, C \in \mathbb{R}$  ja  $B \in \mathbb{C}$  siten, että  $|B|^2 - AC > 0$ . Osoita, että joukko

$$\{z \in \mathbb{C} : A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}$$

on ympyrä täsmälleen silloin kun  $A \neq 0$ .

2. Päteekö  $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ ?
3. Osoita, että kaava  $\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$  ei päde kaikilla  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
4. Määrää ne  $z \in \mathbb{C}$  joille  $e^z \in \mathbb{R}$  ja  $e^z < 0$ .
5. Osoita, että
- a)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ ,
  - (b)  $\text{Log}(\bar{z}) = \overline{\text{Log } z}$  kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ja
  - (c)  $(\bar{z})^w = \overline{z^w}$  kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $w \in \mathbb{R}$ .

6. Osoita, että funktio  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$  ei ole jatkuva.

7. Olkoon  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f(z) = \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}, \quad c \in B(0, 1).$$

Osoita, että  $f(B(0, 1)) = B(0, 1)$ .

8. Olkoot  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $w \in \mathbb{R}$ . Kuinka monta eri arvoa "kompleksisella eksponentilla"  $e^{w \log z}$  on? (vastaus riippuu siitä, onko  $w$  kokonais- rationaalitai irrationaaliluku)