Kompleksianalyysi, Harjoitus 15, 3.5. 2013

1. Olkoon $\pi : S^2(0,1) \to \mathbb{C}$ stereograafinen projektio, $p = (u,v,w) \in S^2(0,1)$ ja $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Osoita, että

$$\pi(p) = \frac{u+iv}{1-w} \quad \text{ja} \quad \pi^{-1}(z) = \Big(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\Big).$$

2. Miksi Möbius-kuvauksen määritelmässä oletetaan $ad - bc \neq 0$?

3. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siten, että jollekin $t > 0$ pätee

$$|f(z_1) - f(z_2)| = t|z_1 - z_2| \quad \text{kaikilla } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että on olemassa $a, b, c \in \mathbb{C}$ siten, että

$$f(z) = az + b\bar{z} + c \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

4. Etsi Möbius-kuvaus $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ siten, että $f(1) = 2i$, $f(\infty) = 1$, ja $f(2) = 0$.

5. Osoita, että Möbius-kuvausten joukko varustettuna yhdistetyn kuvauksen määräämllä laskutoimituksella muodostaa ryhmän, ja että tämä ei ole kommutatiivinen ryhmä.

6. Olkoon $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ Möbius-kuvaus. Osoita, että f voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{kaikilla } z \in \hat{\mathbb{C}}, \text{ missä } a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1. \tag{1}$$

7. Olkoon $\mathbb{H}$ ylempi puolitaso, ja olkoon Möbius-kuvaus f esitetty muodossa (1). Osoita, että $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ jos ja vain jos a, b, c, d ovat kaikki reaalisia.

8. Olkoon $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ konformikuvaus. Osoita, että f on Möbius-kuvaus.