Kompleksianalyysi, Harjoitus 14, 26.4. 2013

1. Osoita Rouché'n lauseen avulla, että n:n asteen polynomilla on kertaluvut huomioiden n nollakohtaa.

2. Kuinka monta nollakohtaa funktiolla $f(z) = z^4 - 6z + 3$ on joukossa $B(0,2) \setminus \overline{B}(0,1)$?

3. Olkoon $f : G \to \mathbb{C}$ analyyttinen, ja γ sykli joukossa G siten, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Osoita, että

$$\int\limits_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

4. Olkoon z_0 analyyttisen funktion f kertaluvun k nollakohta. Osoita, että z_0 on funktion f'/f kertaluvun 1 napa, ja että

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k$$

(ohje: kirjoita f'/f Lauseen 7.8 antaman esityksen avulla).

5. Osoita, että ei ole olemassa konformikuvausta (konformista homeomorfismia)

$$f : B^*(0,1) \to B(0,2) \setminus \overline{B}(0,1)$$

punkteeratusta kiekosta $B^*(0,1)$ renkaaseen $B(0,2) \setminus \overline{B}(0,1)$.

6. Olkoon

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Laske funktion $g(z) = z^{-2} f(z)$ residyt eristetyissä erikoispisteissä (ohje: laske ensin f:n residy origossa. Sen jälkeen voit käyttää kaavaa $f(\pi(n+z)) = f(\pi z)$, $n \in \mathbb{Z}$).

7. Osoita, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(ohje: sovella residylausetta edellisen tehtävän funktioon g ja suuriin origokeskisiin neliöihin).