

## Kompleksianalyysi, Harjoitus 12, 12.4. 2013

1. Etsi funktion  $f(z) = \cos z$  potenssisarjaesitys pisteen 0 ympärillä.

2. Mikä on funktion  $f(z) = e^z - z - 1$  nollakohdan  $z = 0$  kertaluku?

3. Milloin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

suppenee?

4. Etsi funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

Laurent-sarja pisteessä  $z = 1$ .

5. Onko olemassa origon ympäristössä analyyttistä funktiota  $f$  jolle

$$f\left(\frac{i^n}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, 3, \dots?$$

Jos on, niin etsi sellainen.

6. Anna esimerkki ei-vakiosta analyyttisestä funktiosta  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  jolle  $f(z) = 0$  äärettömän monelle  $z \in B(0, 1)$ .

7. Määrä Laurent-sarjan  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  suppenemisrenkas, missä  $a_n = 1/n$  jos  $n > 0$  ja  $a_n = 2^{2n}$  jos  $n \leq 0$ .

8. Millä kompleksiluvuilla  $\lambda$  Laurent-sarja  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{|n|} z^n$  suppenee jossain renkaassa? Mitä funktiota sarja silloin esittää?