Kompleksianalyysi, Harjoitus 11, 5.4. 2013

1. Suppeneeko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \quad ?$$

2. Osoita, että geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ei suppene tasaisesti yksikkökiekossa $B(0,1)$.

3. Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin, ja $f_n : G \to \mathbb{C}$ jono jatkuvia funktioita siten, että $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti joukossa G. Osoita, että f on jatkuva.

4. Olkoon $G \subset \mathbb{C}$ avoin, ja $f_n : G \to \mathbb{C}$ jono jatkuvia funktioita siten, että $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti joukossa G. Olkoon γ tie joukossa G. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n \, dz = \int_\gamma f \, dz.$$

5. Mitkä ovat potenssisarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$, missä $p \in \mathbb{C}$, ja $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ suppenemissäteet?

6. Jos sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde on R, niin mitkä ovat sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ suppenemissäteet?

7. Osoita, että funktio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{\pm ni \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$ (vihje: osoita (M-testin avulla), että kiinteällä $R > 0$ sarja $\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/(z^2 + n^2)$ suppenee tasaisesti kiekossa $B(0,R)$, kunhan $N > 2R$).

8. Missä joukossa sarja

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

määrittelee analyyttisen funktion?