Kompleksianalyysi, Harjoitus 10, 22.3. 2013

1. Osoita, että jokainen sykli kiekossa $B \subset \mathbb{C}$ on nollahomologinen B:ssä.

2. Konstruoi yhdesti yhtenäinen alue $G \subset \mathbb{C}$ siten, että $\mathbb{C} \setminus G$ koostuu äärettömän monesta erillisestä, suljetusta ja yhtenäisestä joukosta.

3. Olkoon $A = B(0,2) \setminus \overline{B}(0,1)$, ja $f : A \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Osoita, että

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$$

kaikilla $1 < s, r < 2$, missä $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

4. Osoita, että alue $G \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen, mikäli $\mathbb{C} \setminus G$:llä ei ole rajoitettua yhtenäisyyskomponenttia.

5. Olkoot α, β, $\gamma : [0, 5\pi/2] \to \mathbb{C}$ siten, että $\alpha(t) = 2e^{it}$, $\beta(t) = e^{it}$ ja $\gamma = [1,2] * \alpha * [2i, i] * \overleftarrow{\beta}$. Missä seuraavista avoimista joukoista γ on nollahomologinen?

(a) $\mathbb{C} \setminus [0, 1/2]$,

(b) $\mathbb{C} \setminus [3, \infty)$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| < e\}$,

(d) $\mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{2}e^{it} : \frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{5}{4}\pi\}$?

6. Kuvaus $H : [0,1] \times [0,1] \to G \subset \mathbb{C}$ on *homotopia* joukossa G, jos H on jatkuva ja $H(s,0) = H(s,1)$ kaikilla $0 \le s \le 1$.

Olkoon $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ suljettu tie ja $z_0 \notin |\gamma|$. Jos

$$\beta(t) = z_0 + \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|},$$

niin osoita, että $H(s,t) = s\gamma(t) + (1-s)\beta(t)$ on homotopia $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:ssa. Piirrä kuva.

7. Olkoon $\gamma = \beta * \alpha$, missä

$$\alpha(t) = e^{-it}, \quad \text{ja} \quad \beta(t) = 3\cos t + i \sin t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Laske

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z(z-2)^2(z-4)}\,dz.$$