

Kompleksianalyysi, Harjoitus 1, 18.1. 2013

1. Olkoot $z = 1 - 3i$ ja $w = 3 + 2i$. Esitä seuraavat muodossa $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$z - 3iw \quad \text{ja} \quad 2|w|^2 + (2 + i)z^2$$

2. ..jatkoa

$$\frac{w + z}{w - z} \quad \text{ja} \quad \frac{1 - iz}{1 + iz}$$

3. ..jatkoa

$$(z + 5z^{-1})^{-1} \quad \text{ja} \quad (\bar{w})^{-1} - w.$$

4. Todista de Moivre'n kaavat.

5. Olkoon $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Osoita, että

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}.$$

6. Näytä, että

$$|w\bar{z} + z\bar{w}| \leq 2|wz|.$$

Milloin pätee yhtäsuuruus?

7. Ratkaise yhtälö $z^4 = -i$.

8. Olkoot z ja $w \in \mathbb{C}$ siten, että $\bar{z}w \neq 1$ ja joko $|z| = 1$ tai $|w| = 1$. Osoita, että

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1.$$

9. Olkoon $w \in \mathbb{R}^2$. Määritellään kuvaus $L_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L_w(z) = z \circ w$, missä \circ on kompleksinen kertolasku. Osoita, että L_w on (reaalinen) lineaarikuvaus, ja etsi kuvauksen matriisi.