Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Harjoitus 5, 16.-17.10.2013

1. Osoita, että Fibonaccin luvuille[1] pätee
   (a) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$,
   (b) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Määritä A^n kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja osoita tämän avulla harjoitusten 4 tehtävä 7.[2]
   (b) Osoita, että $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ kaikilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

3. Osoita, että Fibonaccin luku F_n on reaalilukua $\alpha^n/\sqrt{5}$ lähinnä oleva luonnollinen luku millä tahansa $n \in \mathbb{N}$, kun $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ on ns. kultaisen leikkauksen suhde. Mitä on $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$?

4. Ratkaise rekursioyhtälö
$$x_{n+4} - 2x_{n+2} + x_n = 16(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
alkuarvoilla $x_1 = -2$, $x_2 = 14$, $x_3 = -18$ ja $x_4 = 42$.

5. Ratkaise rekursioyhtälö
$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = n, \quad n \in \mathbb{N},$$
alkuarvoilla $x_1 = 1$ ja $x_2 = 1$.

6. Ratkaise rekursioyhtälö
$$x_{n+3} - 7x_{n+1} + 6x_n = 10 \cdot 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
alkuarvoilla $x_1 = x_2 = -3$ ja $x_3 = 1$.

7. Ratkaise rekursioyhtälö
$$x_{n+2}x_n = 2x_{n+1}^2, \quad n \in \mathbb{N},$$
alkuarvoilla $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$.

[1] Fibonaccin luvut määriteltiin harjoitusten 4 tehtävässä 6.
[2] Vinkki: determinantti.

Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Ohjaus 5, 15.10.2013

1. Osoita, että Fibonaccin luvuille[1] pätee
   (a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,
   (b) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+1} = 2x_n + 4^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvolla $x_1 = 1$.

3. Ratkaise rekursioyhtälö

$$9x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = -3$ ja $x_2 = 1$.

4. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+4} - 2x_{n+2} + x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$ ja $x_4 = 10$.

5. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 6 \cdot 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 4$, $x_2 = 14$ ja $x_3 = 32$.

[1] Fibonaccin luvut määriteltiin harjoitusten 4 tehtävässä 6.