Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Harjoitus 4, 9.-10.10.2013

1. Olkoon $f \in \mathbb{R}$. Määritä rekursioyhtälölle

$$x_{n+1} = x_n + f, \quad n \in \mathbb{N},$$

ratkaisu, kun alkuarvo x_1 on annettu.

2. Olkoot $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ siten, että polynomilla $r^2 - c_1 r - c_0$ on kaksinkertainen juuri. Määritä rekursioyhtälön

$$x_{n+2} = c_1 x_{n+1} + c_0 x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

yksikäsitteinen ratkaisu, kun alkuarvot x_1 ja x_2 on annettu.

3. Ratkaise rekursioyhtälö

$$2x_{n+2} + x_{n+1} = x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 3$ ja $x_2 = 0$.

4. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+2} + 4x_n = 4x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 2$ ja $x_2 = 8$.

5. Ratkaise rekursioyhtälö

$$\tfrac{1}{3}x_{n+2} + 3x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

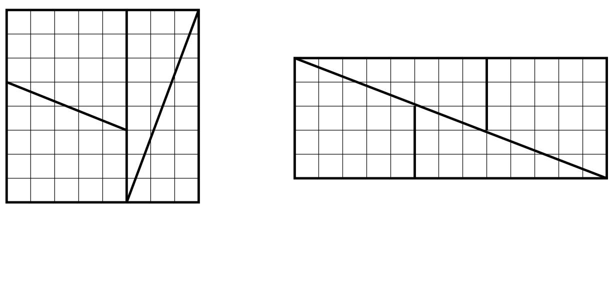
alkuarvoilla $x_1 = 3$ ja $x_2 = 0$.

6. Kaksi ensimmäistä Fibonaccin lukua ovat $F_1 = 1$ ja $F_2 = 1$. Kun $n \geq 3$ on luonnollinen luku, niin määritellään n:s Fibonaccin luku asettamalla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Ratkaise n:s Fibonaccin luku.

7. Osoita, että Fibonaccin luvuille pätee

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kuinka oheinen kuvio liittyy tehtävään?



Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Ohjaus 4, 8.10.2013

1. Olkoon $c > 0$ siten, että $c \neq 1$. Osoita, että

$$\sum_{i=0}^{n-1} c^i = \frac{c^n - 1}{c - 1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2. Olkoot $f \in \mathbb{R}$ ja $c > 0$ siten, että $c \neq 1$. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+1} = cx_n + f, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvolla x_1 edellisen tehtävän avulla suoraan laskemalla.

3. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 1$ ja $x_2 = 1$.

4. Ratkaise rekursioyhtälö

$$2x_{n+1} = \tfrac{1}{3}x_{n+2} + 3x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 0$ ja $x_2 = 9$.

5. Ratkaise rekursioyhtälö

$$x_{n+2} = -9x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

alkuarvoilla $x_1 = 0$ ja $x_2 = -9$.