

## Johdatus diskreettiin matematiikkaan

### Harjoitus 3, 2.-3.10.2013

1. Luvut  $1, \dots, 10$  on laitettu ympyrän kehälle. Osoita, että löytyy kolme vierekkäistä lukua, joiden summa on vähintään 17.

2. Kuinka monta erilaista sanaa on mahdollista muodostaa sanan matematiikka kirjaimista järjestämällä ne uudelleen? Monessako näistä on  $i$  kirjaimet vierekkäin?

3. Osoita, että

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

kaikille  $x, y \in \mathbb{R}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>1</sup>

4. Osoita, että

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Osoita, että epätyhjällä äärellisellä joukolla on yhtä monta parillisalkioista osajoukkoa kuin paritonalkioista osajoukkoa.

6. Osoita, että

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$$

kaikilla  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

7. Määritellään *symmetrinen erotus*  $\Delta$  asettamalla  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  jokaiselle joukolle  $A$  ja  $B$ . Osoita, että

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

kaikille äärellisille joukoille  $A$  ja  $B$ .

---

<sup>1</sup>Tätä kutsutaan Newtonin binomikaavaksi.

**Johdatus diskreettiin matematiikkaan**  
**Ohjaus 3, 1.10.2013**

1. Kahvila myy kymmentä erilaista leivosta. Kuinka monella eri tavalla näistä voidaan valita kolme?
2. Olkoon  $A \subset \{1, \dots, 9\}$  siten, että  $|A| = 6$ . Osoita, että  $x + y = 10$  joillekin  $x, y \in A$ .
3. Mikä on termin  $x^5$  kerroin polynomissa  $(2 + x)^8$ ? Entä termin  $x^3$  polynomissa  $(3 + 4x)^6$ ?<sup>2</sup>
4. Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisiä joukkoja. Osoita, että  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .
5. Olkoot  $A$  ja  $B$  äärellisiä joukkoja. Kuinka monta
  - (a) kuvausta,
  - (b) injektiota,
  - (c) surjektiota,on joukolta  $A$  joukolle  $B$ ?
6. Määritä Stirlingin luvut  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  kaikille  $n \in \{1, \dots, 7\}$  ja  $m \in \{1, \dots, n\}$ .

---

<sup>2</sup>Harjoitustehtävien tulokset voi olettaa tunnetuiksi.