

Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Harjoitus 2, 25.-26.9.2013

1. Osoita, että yhtämahtavuus \sim on ekvivalenssirelaatio. Onko \succ järjestys? Entä osittainen järjestys?
2. Osoita, että äärellisille joukoille A ja B pätee $|B| \geq |A|$ täsmälleen silloin kun $B \succ A$.
3. Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja A_1, \dots, A_n äärellisiä joukkoja. Osoita, että $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|$.
4. Juhlissa osa vieraista on kätellyt toisiansa. Osoita, että on vähintään kaksi vierasta, jotka kättelivät yhtä monta kertaa.¹
5. Osoita, että missä tahansa kuuden ihmisen joukossa on kolme toisilleen tuttua tai kolme toisilleen tuntematonta ihmistä.²
6. Olkoon $A \subset \{1, \dots, 1000\}$ siten, että $|A| = 14$. Osoita, että A :lla on kaksi eri osajoukkoa, joiden alkioden summat ovat samat.
7. Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \{0, \dots, n\}$, niin osoita, että

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

¹Kätteleminen ajatellaan antirefleksiiviseksi ja symmetriseksi relaatioksi.

²Tuttuus ajatellaan refleksiiviseksi ja symmetriseksi relaatioksi.

Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Ohjaus 2, 24.9.2013

1. Jos kätteleminen ajatellaan antirefleksiiviseksi ja symmetriseksi relaatioksi, niin mitä tällä tarkoitetaan?
2. Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja siten, että $|A| = |B|$. Osoita, että $f: A \rightarrow B$ on injektio täsmälleen silloin kun se on surjektio.
3. Olkoot X äärellinen joukko, $A \subset X$ ja $\mathcal{P}_A(X) = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \supset A\}$. Kuinka monta alkioita on joukossa $\mathcal{P}_A(X)$?
4. Kuinka monta tornia voidaan sijoittaa shakkilaudan eri ruuduille siten, että ne eivät uhkaa toisiaan?
5. Eräessä ravintolassa pizzaan voi valita yhdestä neljään täytettä kahdentoista täytteen valikoimasta. Kuinka monella tavalla pizzan voi tilata?
6. Korttipakassa on neljää eri maata ja jokaisen maan kortit on numeroitu yhdestä kolmeentoista. Yhteensä kortteja on siis 52. Kuinka monella eri tavalla pakasta voidaan ottaa
 - (a) viisi korttia?
 - (b) viisi korttia siten, että kolmella kortilla on sama numero?
 - (c) viisi korttia siten, että kaikki kortit ovat samaa maata?
 - (d) viisi korttia siten, että neljällä kortilla on sama numero?