Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Harjoitus 1, 18.-19.9.2013

1. Olkoon $\{A_i\}_i$ joukon A aito ositus. Määritellään relaatio $\sim$ joukolla A asettamalla $a \sim b$, jos on olemassa i siten, että $a, b \in A_i$. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssi. Jos $A = [0, 10)$ ja $A_i = [i-1, i)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, 10\}$, niin hahmottele tasossa näin määriteltyä ekvivalenssirelaatiota.

2. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$. Keksi joukolla A relaatio, joka on
   (a) symmetrinen, mutta ei transitiivinen,
   (b) refleksiivinen, mutta ei symmetrinen,
   (c) transitiivinen, mutta ei refleksiivinen.

Määritä myös kaikki ekvivalenssirelaatiot joukolla A.

3. Keksi joukolla $\mathbb{N}$ refleksiivinen ja symmetrinen relaatio, joka ei ole ekvivalenssi.

4. Määritellään relaatio $\lesssim$ joukolla $\mathcal{M}(2)$ asettamalla $M \lesssim N$, jos $M_{ij} \leq N_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, 2\}$. Osoita, että $\lesssim$ on osittainen järjestys. Onko se järjestys?

5. Olkoon R relaatio joukolla A. Osoita, että relaatio $R \cup \overleftarrow{R}$ on symmetrinen.[1]

6. Osoita, että relaatio R joukolta A joukolle B on kuvaus täsmälleen silloin, kun $\overleftarrow{R}(B) = A$ ja jokaisella $a \in A$ ja $b_1, b_2 \in B$ ehdoista aRb_1 ja aRb_2 seuraa $b_1 = b_2$.

7. Olkoon $f \colon A \to B$ kuvaus. Osoita, että f on injektio täsmälleen silloin, kun
   (a) jokaisella $b \in B$ ja $a_1, a_2 \in A$ ehdoista $b \overleftarrow{f} a_1$ ja $b \overleftarrow{f} a_2$ seuraa $a_1 = a_2$,
   (b) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ kaikilla $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$.

[1] Relaation $R \subset A \times B$ *käänteisrelaatio* on joukko $\overleftarrow{R} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\} \subset B \times A$.

Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Ohjaus 1, 17.9.2013

1. Olkoot A, B, C ja D joukkoja.
   (a) Osoita, että
   $$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D).$$
   (b) Osoita myös, että
   $$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D).$$
   Voiko inkluusio olla tässä aito?

2. Määritellään relaatio $\succ$ joukolla $\mathbb{R}^2$ asettamalla $(x, y) \succ (z, w)$, jos $(x - z, y - w) \in \mathcal{Q}$, missä $\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ ja } y \geq 0\}$. Osoita, että $\succ$ on osittainen järjestys. Onko se järjestys?

3. Osoita, että tavallinen implikaatio $\implies$ on refleksiivinen ja transitiivinen.[2] Onko se järjestys? Entä osittainen järjestys?

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Määritellään relaatio $\approx$ joukolla $\mathbb{R}$ asettamalla $x \approx y$, jos $x, y \in A$ ja $f(x) = f(y)$. Osoita, että $\approx$ on osittainen ekvivalenssi joukolla $\mathbb{R}$ ja ekvivalenssi joukolla A. Jos $x \in A$, niin mikä $[x]$ on?

5. Olkoot $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ kuvauksia.
   (a) Jos f ja g ovat injektioita, niin osoita, että $g \circ f$ on injektio.
   (b) Jos $g \circ f$ on injektio, niin osoita, että f on injektio.
   (c) Jos $g \circ f$ n surjektio, niin osoita, että g on surjektio.

Onko olemassa kuvauksia $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että f ei ole surjektio ja g ei ole injektio, mutta $g \circ f$ on bijektio?

6. Keksi joukolla $\{1, 2, 3\}$ transitiivinen relaatio, joka ei ole kuvaus.

7. Määritä kaikki transitiiviset injektiiviset kuvaukset.

---

[2]Implikaatio ajatellaan tässä naivisti relaatioksi väitelauseiden muodostamalla joukolla.