Algebra 1A, Harjoitus 2
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 8.4. 2016

1. Anna ryhmän U_{14} kaikki sykliset aliryhmät.

2. Osoita, että ryhmän S_3 keskus $Z(S_3) = \{I\}$, missä I on identtinen permutaatio.

3. Olkoot $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ matriiseja joiden kertaluku on äärellinen. Onko tulon AB kertaluku myös äärellinen (vihje: tarkastele peilauksia)?

4. Osoita, että
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$
on ryhmän $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ aliryhmä.

5. Osoita, että $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ on ryhmän $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ syklinen aliryhmä.

6. Olkoon G ryhmä, $a \in G$, ja $C(a) = \{g \in G : ga = ag\}$ alkion a *keskittäjä*. Osoita, että $C(a^{-1}) = C(a)$, $C(a)$ on ryhmän G aliryhmä, ja $Z(G) = \cap_{a \in G} C(a)$.

7. Anna kaikkien neliön symmetriaryhmän D_4 alkioiden keskittäjät.

8. Osoita, että tuloryhmä $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ on syklinen jos ja vain jos $(m, n) = 1$.