Algebra 1B, Harjoitus 7
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 4.3. 2016

1. Osoita, että $I = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_8$ ideaali, ja muodosta tekijärenkaan $\mathbb{Z}_8/I$ laskutaulukot.

2. Osoita, että $J = \{[0]_8, [4]_8\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_8$ ideaali, ja muodosta tekijärenkaan $\mathbb{Z}_8/J$ laskutaulukot.

3. Anna surjektiiviset homomorfismit $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2$ ja $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$. Osoita Isomorfialauseen avulla, että edellisten tehtävien renkaat $\mathbb{Z}_8/I$ ja $\mathbb{Z}_8/J$ ovat isomorfiset renkaiden $\mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_4$ kanssa. Onko jompikumpi ideaaleista I, J maksimaalinen?

4. Olkoon K kunta. Osoita, että $K[x]$ on pääideaalirengas (vihje: Sovella jakoyhtälöä).

5. Olkoon

$$S = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right\}, \quad I = \left\{ B \in S : B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Osoita, että S on renkaan $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alirengas, ja että I on renkaan S ideaali.

6. Olkoot S ja I kuten edellisessä tehtävässä. Osoita Isomorfialauseen avulla, että tekijärengas S/I on isomorfinen renkaan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kanssa.

7. Tarkastellaan rengasta $\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva}\}$. Olkoon I renkaan $\mathcal{C}([0,1])$ maksimaalinen ideaali. Osoita, että on olemassa $x \in [0,1]$ siten, että $I = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(x) = 0\}$. Tarvitset seuraavia faktoja:

1. Jos f on jatkuva ja $f(y) > 0$, niin on olemassa $a < y < b$ siten, että $f(w) > 0$ kaikilla $a < w < b$ väliltä $[0,1]$.
2. (kompaktisuus): Jos avoimet välit $]a_j, b_j[$ yhdessä peittävät välin $[0,1]$, niin jo äärellisen moni väleistä riittää peittämään välin $[0,1]$.

8. Olkoon $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ *Gaussin kokonaislukujen* rengas, ja $I = (3+i)$ pääideaali. Osoita, että tekijärengas $\mathbb{Z}[i]/I$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ kanssa (vihje: Osoita: $a+bi \in I$ joss $a-3b \in I$ joss $a - 3b \equiv 0 \pmod{10}$).