

Algebra 1B, Harjoitus 6
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 26.2. 2016

1. Laske $[2x + 3]_p + [-5x - 2]_p[x + 3]_p$ renkaassa $\mathbb{Q}[x]/p$, kun $p = x^2 + 3x + 1$ (esitä tulos muodossa $[ax + b]_p$).
2. Olkoon $p = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Anna kaikki jäännösluokan $[2x + 1]_p \subset \mathbb{Z}_3[x]$ polynomit joiden aste on korkeintaan 2.
3. Muodosta jäännösluokkarenkaiden $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$ ja $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ kertolaskutaulukot. Anna isomorfismi renkaiden välillä (isomorfisuutta ei tarvitse todistaa).
4. Mitkä renkaista $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + 1)$, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$, $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x)$ ovat isomorfisia renkaan \mathbb{Z}_4 kanssa? Anna isomorfismi (isomorfisuutta ei tarvitse todistaa) tai perustele miksi isomorfismia ei ole (katso monisteen Esimerkki 6.16).
5. Osoita, että rengas $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 5)$ kanssa (katso monisteen Esimerkki 6.21).
6. Muodosta kunta jossa on 9 alkioita.
7. Anna alkion $[2x - 3]_p$ käänteisalkio kunnassa $\mathbb{Q}[x]/p$, kun $p = x^2 - 2$.
8. Muodosta neljännen asteen polynomi $p \in \mathbb{Z}_2[x]$ siten, että jokainen renkaan $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ alkio on polynomin p juuri.