Algebra 1B, Harjoitus 5
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 19.2. 2016

1. Olkoot $f = [3]x^4 + [2]x^3 + [4]x^2 + [3]$ ja $g = [4]x^3 + [2]x^2 + [2]x + [3]$ renkaan $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomeja. Laske tulo fg.

2. Anna osamäärä ja jakojäännös (eli jaa jakokulmassa) renkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$, kun jaettava on $x^5 + [2]x^4 + x^2 + [1]$ ja jakaja $[2]x^2 + [2]$.

3. Osoita Algebran peruslauseen (monisteen Lause 3.2) avulla, että jokainen vakiosta eroava polynomi $f \in \mathbb{C}[x]$ voidaan esittää ensimmäisen asteen polynomien tulona.

4. Esitä polynomi $x^5-4x^4+9x^3+3x^2-12x+3$ renkaan $\mathbb{Q}[x]$ jaottomien polynomien tulona. Perustele välivaiheet.

5. Esitä polynomi $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$ renkaan $\mathbb{Q}[x]$ jaottomien polynomien tulona. Perustele välivaiheet.

6. Polynomi $f = x^4 + 1$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$, mutta jaollinen renkaassa $\mathbb{R}[x]$. Esitä f renkaan $\mathbb{R}[x]$ jaottomien polynomien tulona (vihje: mieti millainen tekijöihinjako on mahdollinen).

7. Olkoon $p > 1$ alkuluku, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_p)$ kaikkien funktioiden $F : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ rengas, ja $\Phi : \mathbb{Z}_p[x] \to \mathcal{F}(\mathbb{Z}_p)$ homomorfismi joka vie polynomin f vastaavaksi polynomifunktioksi $f(x) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ (monisteen Lause 5.24). Osoita, että Φ ei ole injektio.

8. Onko edellisen tehtävän homomorfismi Φ surjektio?