Algebra 1B, Harjoitus 4
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 12.2. 2016

1. Muodosta tulorenkaan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yhteen- ja kertolaskutaulukot.

2. Olkoon $S = \{a, b\}$ kahden alkion joukko, ja $P(S) = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$ kaikkien joukon S osajoukkojen kokoelma varustettuna laskutoimituksilla

$$M + N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M), \quad MN = M \cap N$$

(vertaa Harj. 2 T7). Anna isomorfismi $f : P(S) \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Riittää vertailla laskutaulukoita, isomorfisuutta ei tarvitse todistaa.

3. Osoita homomorfismin $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{11}$, $f(a) = [a]_{11}$ perusominaisuuksien avulla, että

$$f(10^k) = f((-1)^k)$$

kaikilla $k \geq 1$ (katso monisteen Esimerkki 4.43).

4. Olkoon $b = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Esimerkiksi jos $b = 197$, niin $a_2 = 1$, $a_1 = 9$ ja $a_0 = 7$. Osoita, että $11|b$ jos ja vain jos 11 jakaa summan

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

5. Kuinka monta yksikköä on renkaissa $\mathbb{Z}_9$ ja $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$? Päättele tästä, että renkaat eivät ole keskenään isomorfiset.

6. Olkoon $n \geq 2$, ja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ homomorfismi. Osoita, että $f(a) = [a]_n$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$.

7. Osoita, että rengas $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ei ole isomorfinen renkaan $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ kanssa (vihje: Jos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}]) \to \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ on homomorfismi, niin $f(2) = f(\sqrt{2})^2$).

8. Olkoot $a, b > 0$, $(a, b) = 1$. Osoita, että $f : \mathbb{Z}_{ab} \to \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$, $f([x]_{ab}) = ([x]_a, [x]_b)$ on hyvin määritelty kuvaus ja lisäksi isomorfismi.