Algebra 1B, Harjoitus 3
Palauta kirjalliset ratkaisut 5.2. 2016 mennessä

1. Osoita, että $F = \{0, e, a, b\}$ seuraavilla laskutoimituksilla varustettuna on kunta (voit olettaa liitännäis- ja osittelulait tunnetuiksi).

+	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

·	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

2. Anna renkaiden $\mathbb{Z}_{12}$ ja $\mathbb{Z}_{15}$ yksiköt ja niitä vastaavat käänteisalkiot.

3. Olkoon $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Osoita, että $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ on reaalilukujen kunnan alirengas.

4. Osoita, että $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ on kunta (voit käyttää tietoa: $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku).

5. Osoita, että $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ (voit käyttää tietoa: $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{6}$ ovat irrationaalilukuja).

6. Osoita, että jokainen $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ reaalisten 2×2-matriisien renkaassa $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on joko yksikkö tai nollanjakaja (Monisteen Esimerkki 4.27).

7. Olkoon $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ polynomifunktioiden rengas. Osoita, että $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ on kokonaisalue.

8. *Kvaternioiden* rengas $\mathbb{H}$ voidaan määritellä asettamalla joukkoon

$$\{w = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

"tavallinen"yhteenlasku

$$a + bi + cj + dk + a' + b'i + c'j + d'k = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

ja kertolasku, missä

$$(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$$

lasketaan käyttämällä renkaan osittelulakeja ja asettamalla

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

(i) Osoita, että jokainen $w \in \mathbb{H}$, $w \neq 0_{\mathbb{H}}$ on yksikkö (vihje: kuten kompleksilukujen tapauksessa, määrittele $\overline{w} = a - bi - cj - dk$).

(ii) Osoita, että yhtälöllä $x^2 = -1_{\mathbb{H}}$ on äärettömän monta ratkaisua renkaassa $\mathbb{H}$.