Algebra 1B, Harjoitus 2
Palauta kirjalliset ratkaisut 29.1. 2016 mennessä

1. Olkoot z ja w kompleksilukuja. Osoita, että

(i) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$,

(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ ja

(iii) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

2. Ratkaise z yhtälöstä $(2i + 1) + 3iz = 5i$.

3. Olkoon $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ reaalikertoiminen polynomi. Oletetaan, että kompleksiluku z on polynomin $f(z)$ juuri. Osoita, että myös konjugaatti $\overline{z}$ on polynomin $f(z)$ juuri.

4. Kompleksiluku $1 + i$ on polynomin $f(z) = z^4 - 2z^3 - z^2 + 6z - 6$ juuri. Etsi polynomin $f(z)$ muut kompleksilukujuuret (kynällä ja paperilla, näytä välivaiheet).

5. Osoita, että jäännösluokkarengas $\mathbb{Z}_n$ on todella rengas.

6. Osoita renkaan perusominaisuuksien avulla, että renkaan $\{w, x, y, z\}$ allaolevan laskutoimitustaulukon voi täydentää täsmälleen yhdellä tavalla.

+	w	x	y	z
w	w	x	y	z
x	x	w	z	
y	y	z	w	
z	z			

·	w	x	y	z
w	w	w	w	w
x	w	w	x	
y	w	x	y	
z	w			

7. Olkoon $S = \{a, b, c\}$ kolmen alkion joukko, ja $P(S)$ kaikkien joukon S osajoukkojen kokoelma. Asetetaan joukkoon $P(S)$ "yhteen- ja kertolasku"

$$M + N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M), \quad MN = M \cap N.$$

Muodosta renkaan $P(S)$ yhteen- ja kertolaskutaulukot.

8. Olkoon R *Boolen rengas*, eli rengas jossa $x^2 = x$ kaikilla $x \in R$ (esimerkkinä edellisen tehtävän rengas).

(a) Osoita, että $a + a = 0_R$ kaikilla a (vihje: lavenna $(a + a)^2$).

(b) Osoita, että R on vaihdannainen (vihje: lavenna $(a + b)^2$).