Algebra 1A, Harjoitus 7
Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 13.5. 2016

1. Anna homomorfismi $f : \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_4$ (tässä kuten yleensäkin $\mathbb{Z}_{16}$ ja $\mathbb{Z}_4$ ovat additiivisia), jonka ydin on $N = \langle [4]_{16} \rangle$. Totea isomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_{16}/N \cong \mathbb{Z}_4$.

2. Olkoon $\mathbb{R}^{**} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ kertolaskulla varustettuna. Osoita, että $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^{**}$, $f(x) = x^2$, on surjektiivinen homomorfismi. Päättele tästä edelleen, että $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^{**}$.

3. Olkoon $\mathrm{CO}(2)$ konformisten matriisien ryhmä (Harjoitus 3 tehtävä 4). Osoita, että determinanttikuvaus $\det : \mathrm{CO}(2) \to \mathbb{R}^{**}$ on surjektiivinen homomorfismi jonka ydin on $\mathrm{SO}(2)$. Päättele tästä, että $\mathrm{CO}(2) \,/\, \mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{R}^{**}$.

4. Osoita, että kvaternioiden ryhmän Q (Harjoitus 5 Tehtävä 7) jokainen aliryhmä on normaali (vihje: Huomaa, että jokainen aito aliryhmä on syklinen).

5. Anna surjektiivinen homomorfismi $f : Q \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Osoita, ettei ole olemassa surjektiivista homomorfismia $f : Q \to \mathbb{Z}_4$.

6. Olkoon G Abelin ryhmä, $K = \{a \in G : |a| \leq 2\}$, $H = \{x^2 : x \in G\}$. Osoita, että K ja H ovat ryhmän G aliryhmiä joille pätee $G/K \cong H$.

7. Olkoon

$$\mathrm{Aff}(2) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = Ax + b : \ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^2\}$$

affiinien kuvausten ryhmä yhdistetyn kuvauksen laskutoimituksella varustettuna. Osoita, että

$$V = \{f(x) = ux + b \in \mathrm{Aff}(2) : u \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}^2\},$$

on ryhmän $\mathrm{Aff}(2)$ normaali aliryhmä. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä $\mathrm{Aff}(2)/V$ on isomorfinen?

8. Olkoon G ryhmä jonka keskukselle $Z(G)$ pätee: $G/Z(G)$ on syklinen. Osoita, että G on Abelin ryhmä. Osoita edelleen, että jos $|G| = pq$, missä p ja q ovat alkulukuja, niin $Z(G) = \{e\}$ tai $Z(G) = G$.