

**Algebra 1A, Harjoitus 3**  
**Palauta kirjalliset ratkaisut viimeistään 15.4. 2016**

1. Mitkä ryhmistä  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $D_4$  ja  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  ovat keskenään isomorfiset? Perustele.
2. Anna isomorfismi  $f : U_5 \rightarrow U_{10}$ .
3. Etsi kaikki homomorfismit  $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$  (vihje: Koska  $f([a]) = af([1])$ , arvo  $f([1])$  määrää homomorfismin  $f$  yksikäsitteisesti).
4. *Konformiset matriisit*  $\text{CO}(2)$  muodostavat ryhmän  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$  aliryhmän,

$$\text{CO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Anna isomorfismi  $f : \text{CO}(2) \rightarrow \mathbb{C}^*$ , ja osoita isomorfisuus. Tässä

$$\mathbb{C}^* = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$$

kertolaskulla  $(a, b) \star (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$  varustettuna.

5. Osoita, että ryhmien isomorfisuus on ekvivalenssirelaatio (Monisteen Huom. 1.41)
6. Olkoon  $Q \subset \mathbb{R}^3$  yksikkökuutio. Ryhmään  $T_d$  kuuluvat kaikki avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kierrot  $f$  joille pätee  $f(Q) = Q$  (katso Monisteen Esimerkki 1.54). Kullakin kierrolla on kiertoakseli, jonka ympäri kierretään. Kuinka monta eri kiertoakselia ryhmän  $T_d$  alkioilla on? Kerro myös lyhyesti kuinka monta kiertoa liittyy mihinkin akseliin (muista:  $|T_d| = 24$ ).
7. Anna surjektiivinen homomorfismi  $f : T_d \rightarrow S_3$  (vihje: Väritä kuutio kolmella värillä siten, että vastakkaiset sivut ovat saman väriset. Määrittele kuvaus värityksen mukaan).
8. Jos  $G$  on ryhmä, niin joukko

$$\text{Inn}(G) = \{f_c : G \rightarrow G, f_c(g) = c^{-1}gc : c \in G\}$$

yhdistetyn kuvauksen antamalla laskutoimituksella varustettuna on myös ryhmä. Osoita, että  $\text{Inn}(D_4)$  on isomorfinen ryhmän  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  kanssa (vihje: Muista, että  $k_2g = gk_2$  kaikilla  $g \in D_4$ ).