Algebra 1B, Harjoitus 1
Palauta kirjalliset ratkaisut 22.1. 2016 mennessä

1. Etsi kaikki kokonaislukuratkaisut x kongruenssiyhtälölle $a \equiv x \pmod{n}$, kun (i) $a = 25$ ja $n = 6$, (ii) $a = -27$ ja $n = 4$.

2. Esitä kaikki jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}_5$ alkiot $[0]_5, [1]_5, \ldots, [4]_5$ kokonaislukujen joukon osajoukkoina.

3. Esitä jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}_4$ laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ taulukoiden avulla. Huomaa, että $[a] \odot [b] = [0]$ joillekin $[a] \neq [0]$ ja $[b] \neq [0]$.

4. Esitä jäännösluokkarenkaan $\mathbb{Z}_7$ laskutoimitus $\odot$ taulukon avulla. Huomaa, että $[a] \odot [b] = [0]$ ainoastaan silloin, kun $[a] = 0$ tai $[b] = 0$.

5. Osoita, että kongruenssi modulo n on ekvivalenssirelaatio (monisteen Lemma 2.6).

6. Etsi kaikki ratkaisut yhtälölle

(i) $[3] \odot x = [1]$ renkaassa $\mathbb{Z}_6$,

(ii) $x^2 \oplus [3] \odot x = [3]$ renkaassa $\mathbb{Z}_5$.

7. Olkoon $a \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ tai $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$ (vihje: sovella jakoyhtälöä).

8.

(i) Etsi kaikki ratkaisut yhtälölle $x^2 \oplus x = [0]$ renkaassa $\mathbb{Z}_6$.

(ii) Olkoon $p > 1$ on alkuluku. Osoita, että $x^2 \oplus x = [0]$ renkaassa $\mathbb{Z}_p$ täsmälleen silloin, kun $x = [0]$ tai $x = [p-1]$.