Algebra 1A, Harjoitus 2, 8.4. 2015

1. Olkoon $GL_2(\mathbb{R})$ kääntyvien 2×2-matriisien multiplikatiivinen ryhmä. Laske matriisin

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

kertaluku.

2. Muodosta ryhmän U_{11} sykliset aliryhmät $\langle [2] \rangle$ ja $\langle [3] \rangle$ (U_{11} on tässäkin $\mathbb{Z}_{11}$:n yksikköjen joukko kertolaskulla varustettuna).

3. Olkoon G ryhmä, jolle pätee $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ kaikilla $a, b \in G$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.

4. Etsi kaikki neliön symmetriaryhmän D_4 sykliset aliryhmät.

5. Osoita, että additiivinen ryhmä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ on syklinen.

6. Osoita, että ryhmän S_3 keskus $Z(S_3) = \{I\}$.

7. Osoita, että $SL_2(\mathbb{R})$ on ryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ aliryhmä, missä

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

8. Olkoon G ryhmä, $a \in G$ ja $C(a) = \{g \in G : ga = ag\}$. Osoita, että $C(a)$ on ryhmän G aliryhmä.

9. Olkoon $G \neq \langle e \rangle$ ryhmä jolla ei ole aitoja aliryhmiä. Osoita, että G on syklinen ryhmä jonka kertaluku on alkuluku.

10. Kuinka monta alkiota on kuution symmetriaryhmässä (toisin sanoen, kuinka moni avaruuden $\mathbb{R}^3$ kierto ja peilaus kuvaa kuution itselleen)?