

## Algebra 1A, Harjoitus 1, 25.3. 2015

1. Osoita, että joukko  $\mathbb{R}^{**} = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$  reaalilukujen kertolaskulla varustettuna on Abelin ryhmä.
2. Olkoon  $G$  ryhmä, ja  $a, b, c \in G$  siten, että  $ba = ca$ . Osoita, että  $b = c$ .
3. Olkoon  $G$  ryhmä, ja  $a, b \in G$ . Osoita, että  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
4. Osoita, että  $S_3$  ei ole Abelin ryhmä. Päättelä tästä, että  $S_n$  ei ole Abelin ryhmä millään  $n \geq 3$  (kun  $n \geq 4$ , voit valita permutaatiot  $f, g \in S_n$  joilla  $f(4) = g(4) = 4, f(5) = g(5) = 5\dots$ ).
5. Laske kaikkien ryhmän  $S_3$  permutaatioiden kertaluvut.
6. Mitkä alkioit kuuluvat tasasivuisen kolmion symmetriaryhmään  $D_3$  (ryhmässä on kuusi alkioita)?
7. Mitkä alkioit kuuluvat tasakylkisen kolmion symmetriaryhmään jos se ei ole tasasivuinen? Entä suorakulmion symmetriaryhmään jos se ei ole neliö?
8. Täydennä ryhmän  $(G, \star), G = \{a, b, c, d\}$ , laskutaulukko:

$\star$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$		
$c$	$c$		$a$	
$d$	$d$			
9. Olkoon  $T \subset \mathbb{R}^2$  tason yksikkökierokko;  $T = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ . Mitkä alkioit kuuluvat joukon  $T$  symmetriaryhmään?
10. Olkoon  $n \geq 2$  ja  $f \in S_n$ . Osoita, että  $f^k = I$  jollain  $k \in \mathbb{N}$ , missä  $I$  on identtinen kuvaus.