Algebra 1B, Harjoitus 7, 4.3. 2015

1. Olkoon I renkaan R ideaali ja J renkaan S ideaali. Osoita, että $I \times J$ on renkaan $R \times S$ ideaali.

2. Osoita, että kahden polynomin joukko $\{2, x\}$ virittää renkaan $\mathbb{Z}[x]$ ideaalin

$$I = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x] : \ a_0 \text{ on parillinen}\}.$$

3. Osoita Isomorfialauseen avulla, että rengas $\mathbb{Z}_{20}/(5)$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_5$ kanssa. Huomaa, että tässä $(5) = \{[0]_{20}, [5]_{20}, [10]_{20}, [15]_{20}\}$.

4. Olkoon I renkaan R ideaali. Osoita, että rengas $(R \times R)/(I \times I)$ on isomorfinen renkaan $(R/I) \times (R/I)$ kanssa (vihje: anna sopiva surjektiivinen homomorfismi ja sovella Isomorfialausetta).

5. Olkoon F kunta, S rengas, ja $f : F \to S$ homomorfismi siten, että $f(a) \neq 0_S$ jollain $a \in F$. Osoita, että f on injektio (vihje: mitä ideaaleja kunnassa voi olla?).

6. Olkoon I niiden renkaan $\mathbb{Z}_8$ alkioiden joukko jotka eivät ole yksiköitä. Osoita, että I on ideaali ja lisäksi renkaan $\mathbb{Z}_8$ ainoa maksimaalinen ideaali.

7. Osoita, että renkaissa $\mathbb{Z}_{10}$ ja $\mathbb{Z}_{15}$ on useampi kuin yksi maksimaalinen ideaali.

8. Osoita, että pääideaali $(x - 1) \in \mathbb{Z}[x]$ on renkaan $\mathbb{Z}[x]$ alkuideaali joka ei ole maksimaalinen ideaali.

9. Osoita, että 2×2-reaalimatriisien renkaan $R = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ainoat ideaalit ovat nollamatriisi ja R (osoita, että jos ideaali I sisältää jonkin nollasta poikkeavan matriisin, niin se välttämättä sisältää myös yksikkömatriisin).

10. Joukko

$$R = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

on kompleksilukujen kunnan alirengas. Osoita, että joukko

$$M = \{a + bi : \ 3|a \text{ ja } 3|b\} \subset R$$

on renkaan R maksimaalinen ideaali.