Algebra 1B, Harjoitus 6, 25.2. 2015

1. Osoita, että joukko $I = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali.

2. Muodosta jäännösluokkarenkaiden $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$ ja $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ yhteenlaskutaulukot.

3. Muodosta edellisen tehtävän jäännösluokkarenkaiden kertolaskutaulukot.

4. Olkoon F kunta. Muodosta jäännösluokkarengas $F[x]/(x)$.

5. Anna isomorfismi

$$f : \mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$

missä $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

6. Renkaan R *karakteristika* on pienin positiivinen kokonaisluku m jolle $m1_R = 0_R$ (muista merkintä; esimerkiksi $3\,1_R = 1_R + 1_R + 1_R$). Jos tällaista lukua ei ole, karakteristika on 0. Osoita, että kokonaisalueen karakteristika on joko 0 tai alkuluku.

7. Olkoon $\{0\} \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}$ renkaan $\mathbb{Z}$ ideaali. Osoita, että $I = (n)$ jollekin $n \in \mathbb{Z}$.

8. Olkoon F kunta, ja $p(x) \in F[x]$ jaoton toisen asteen pääpolynomi. Osoita, että on olemassa alkiot $a, b \in F[x]/(p(x))$ siten, että $p(x) = (x-a)(x-b)$.

9. Osoita, että $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ ei ole isomorfinen renkaan $\mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$ kanssa.

10. Onko olemassa toisen asteen polynomit $p(x) \neq q(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ siten, että $\mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_2[x]/(q(x))$ kanssa?