Algebra 1B, Harjoitus 5, 18.2. 2015

Osoita tehtävissä 1-3, että annetut polynomit ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Q}[x]$:

1. a) $x^5 - 4x + 22$, b) $-7x^4 + 25x^2 - 15x + 10$, c) $5x^{11} - 6x^4 + 12x^3 + 36x - 6$.

2. a) $x^4 + 2x^3 + x + 1$, b) $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$.

3. $12542395238509235234 57x^3 + 4645819548582347598 39x^2 + 1284588305238509253$.

4. Osoita, että polynomi $x^4 + 1$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$, mutta jaollinen renkaassa $\mathbb{R}[x]$.

5. Esitä polynomi $x^2 + x + 1 + i \in \mathbb{C}[x]$ jaottomien polynomien tulona.

6. Olkoon $a + bi \in \mathbb{C}$ reaalikertoimisen polynomin $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ juuri. Osoita, että myös $a - bi$ on juuri. Päteekö tulos jos $f(x)$ on kompleksikertoiminen?

7. Anna kokonaislukukertoiminen polynomi $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \in \mathbb{Q}[x]$ siten, että $f(x)$ on jaoton mutta $\overline{f}(x) = [a_0]_n + [a_1]_nx + \cdots + [a_k]_nx^k \in \mathbb{Z}_n[x]$ on jaollinen kaikilla $n = 2, 3, 4, 5$.

8. Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että polynomi $f(x) = x^{p-1} - x^{p-2} + x^{p-3} - \ldots - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ on jaoton.

9. Olkoon F kunta, ja (kahden muuttujan) polynomirengas $R[y]$, missä $R = F[x]$. Muotoile ja todista Eisensteinin ehto renkaalle $R[y]$ (vihje: korvaa Eisensteinin ehdossa alkuluvut renkaan $F[x]$ jaottomilla polynomeilla).

10. Olkoon $R[y]$ kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että polynomi $x^2 + y^2 - 1 \in R[y]$ on jaoton.