

## Algebra 1B, Harjoitus 4, 11.2. 2015

1. Etsi jakoyhtälön osamäärä  $q(x)$  ja jakojäännös  $r(x)$ , kun jaettava  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  ja jakaja  $g(x) = x^2 - 1$  renkaassa  $\mathbb{Q}[x]$ .
2. Olkoon  $R$  kokonaisalue. Osoita, että  $R[x]$  on kokonaisalue.
3. Olkoon  $R$  vaihdannainen rengas. Osoita, että  $R[x]$  on vaihdannainen.
4. Olkoon  $p > 1$  alkuluku. Kuinka monta asteen  $d$  polynomia on renkaassa  $\mathbb{Z}_p[x]$ ?
5. Olkoon  $f(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ . Oletetaan, että  $b, c \in \mathbb{Z}$ , ja että polynomilla  $f(x)$  on kokonaislukujuuri. Osoita, että kaikki polynomien  $f(x)$  juuret ovat kokonaislukuja (voit tarkastella toiseen asteen yhtälön ratkaisukaavassa termien parillisuutta).
6. Olkoon  $F$  kunta, ja  $f(x)$  toisen tai kolmannen asteen polynomi. Jos polynomilla  $f(x)$  ei ole juuria, osoita että  $f(x)$  on jaoton (Lause 5.10).
7. Mitkä seuraavista polynomeista ovat jaottomia?
  - (i)  $x^4 - [2]x^2 - [3] \in \mathbb{Z}_5[x]$
  - (ii)  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$
  - (iii)  $x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
8. Olkoon  $p > 1$  alkuluku. Osoita, että on olemassa polynomi  $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$  jolla ei ole juuria.
9. Olkoon  $F$  kunta, ja  $a(x), b(x), c(x) \in F[x]$  siten, että  $a(x)|b(x)c(x)$ . Osoita, että jos polynomien  $a(x)$  ja  $b(x)$  suurin yhteinen tekijä on  $1_F$ , niin  $a(x)|c(x)$  (Lause 5.5).
10. Olkoon  $p > 1$  alkuluku. Kuinka monta jaotonta toisen asteen polynomia on renkaassa  $\mathbb{Z}_p[x]$ ?