Algebra 1B, Harjoitus 3, 4.2. 2015

1. Olkoot R, S ja T renkaita, ja $f : R \to S$, $g : S \to T$ isomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on isomorfismi.

2. Olkoon R rengas. Osoita, että $f : \mathbb{Z} \to R$, $f(n) = n1_R$ on homomorfismi (muista: $n1_R = 1_R + 1_R + \cdots + 1_R$, missä summattavia n kappaletta).

3. Osoita, että jos $g : \mathbb{Z} \to R$ on homomorfismi, niin $g(n) = n1_R$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

4. Olkoon $X = \{a, b\}$ kahden alkion muodostama joukko. Varustetaan osajoukkojen kokoelma $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ laskutoimituksilla $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ja $A \cap B$. Osoita, että $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ kanssa.

5. Olkoon $b = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Esimerkiksi jos $b = 197$, niin $a_2 = 1$, $a_1 = 9$ ja $a_0 = 7$. Osoita, että $11|b$ jos ja vain jos 11 jakaa summan

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

6. Olkoon R vaihdannainen rengas ja $f : R \to S$ surjektiivinen homomorfismi. Onko S vaihdannainen? Entä jos f ei ole surjektiivinen?

7. Olkoon $R = (\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ Harjoitusten 2 tehtävän 4 rengas. Osoita, että R on isomorfinen kokonaislukujen renkaan kanssa.

8. Onko rengas R isomorfinen renkaan S kanssa, kun

(i) $R = \mathbb{Z}$ ja $S = \mathbb{Q}$

(ii) $R = \mathbb{Z}$ ja $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

(iii) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ja $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$?

9. Olkoot $a, b > 0$, $(a, b) = 1$. Osoita, että $\mathbb{Z}_{ab}$ on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ kanssa.

10. Olkoot $a, b > 0$, $(a, b) > 1$. Osoita, että $\mathbb{Z}_{ab}$ ei ole isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ kanssa.