Algebra 1B, Harjoitus 2, 28.1. 2015

1. Osoita, että $F = \{0, e, a, b\}$ seuraavilla laskutoimituksilla varustettuna on kunta (voit olettaa liitännäis- ja osittelulait tunnetuiksi).

+	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

·	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

2. Osoita renkaan perusominaisuuksien avulla, että renkaan $\{r, s, t\}$ allaolevan laskutoimitustaulukon voi täydentää täsmälleen yhdellä tavalla.

+	r	s	t
r	r	s	t
s	s	t	r
t	t	r	s

·	r	s	t
r	r	r	r
s	r	t	
t	r		

3. Osoita, että *Gaussin kokonaislukujen* joukko

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

on kompleksilukujen kunnan alirengas.

4. Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitukset $\oplus$ ja $\odot$ seuraavasti:

$$m \oplus n = m + n + 1, \quad m \odot n = mn + m + n.$$

Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on rengas.

5. Olkoon R rengas ja $a, b \in R$. Todista seuraavat väitteet:

(i) $(-1) \cdot a = -a$,

(ii) $(-a)(-b) = ab$.

6. Olkoon R kokonaisalue ja $x \in R$. Osoita, että jos $x^2 = 1_R$, niin $x = 1_R$ tai $x = -1_R$.

7. Olkoon R *Boolen rengas*, eli rengas jossa $x^2 = x$ kaikilla $x \in R$.

(a) Osoita, että $a + a = 0_R$ kaikilla a (vihje: lavenna $(a + a)^2$).

(b) Osoita, että R on vaihdannainen (vihje: lavenna $(a + b)^2$).

Käännä

8. Osoita, että jokainen $A \neq 0$ reaalisten 2×2-matriisien renkaassa $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on joko yksikkö tai nollanjakaja.

9. Anna esimerkki funktiosta f jatkuvien reaalifunktioiden renkaassa $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ siten, että f ei ole yksikkö eikä nollanjakaja.

10. *Kvaternioiden* rengas $\mathbb{H}$ voidaan määritellä asettamalla joukkoon

$$\{a + bi + cj + dk : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

"tavallinen"yhteenlasku

$$a + bi + cj + dk + a' + b'i + c'j + d'k = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

ja kertolasku, missä

$$(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$$

lasketaan käyttämällä renkaan osittelulakeja ja asettamalla

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

(i) Osoita, että jokainen $w \in \mathbb{H}$, $w \neq 0_{\mathbb{H}}$ on yksikkö.

(ii) Osoita, että yhtälöllä $x^2 = -1_{\mathbb{H}}$ on äärettömän monta ratkaisua renkaassa $\mathbb{H}$.